JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 15, 116–123 (1975)

Approximation und Interpolation durch ganze Funktionen

LOTHAR HOISCHEN

Mathematisches Institut der Universität Gießen, Germany

Communicated by Oved Shisha

Es bezeichne C^∞ den Raum aller auf der reellen Achse $R(-\infty < x < \infty)$ komplexwertigen, beliebig oft differenzierbaren Funktionen.

In [5] wurde folgender Satz über die asymptotische Approximation sämtlicher Ableitungen der Funktionen aus C^∞ durch die entsprechenden Ableitungen ganzer Funktionen bewiesen.

SATZ 1. *Zu jeder Funktion $f \in C^\infty$, jeder auf R positiven, stetigen Funktion h und jeder Folge reeller Zahlen c_n mit $0 \leqslant c_n \leqslant c_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2,...)$ und $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ gibt es eine in der ganzen komplexen z-Ebene $(z = x + iy)$ analytische Funktion g so, daß für alle $n = 0, 1, 2,...$ gilt*

$$|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| < h(x) \qquad (|x| \geqslant c_n). \tag{1}$$

Ist f auf R positiv, so kann hierbei auch die Funktion g auf R positive gewählt werden.

Dieser Satz verschärft insbesondere den 1927 von Carleman [1] bewiesenen Approximationssatz, daß zu jeder auf R stetigen Funktion f und jeder auf R positiven, stetigen Funktion h eine ganze Funktion g mit

$$|f(x) - g(x)| < h(x) \; (x \in R)$$

existiert.

Neuere Beweise dieses Carlemanschen Satzes wurden in [3, 6, 9] gegeben. In [4] wurde ein entsprechender Satz über die asymptotische Approximation durch ganze Dirichlet-Reihen bewiesen.

Bezüglich Satz 1 kann man vermuten, daß sich an die approximierende ganze Funktion g und ihre sämtlichen Ableitungen noch zusätzlich zu der Bedingung (1) gewisse Interpolationsforderungen stellen lassen.
Wir beweisen in dieser Arbeit als wesentliche Verschärfung von Satz 1 den folgenden Approximations- und Interpolationssatz.

SATZ 2. *Zu jeder Funktion $f \in C^\infty$, jeder auf R positiven, stetigen Funktion h, jeder Folge reeller Zahlen c_n mit* $0 \leqslant c_n \leqslant c_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2,...)$,

$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ *und zu jeder Folge verschiedener reeller Zahlen* $x_m(m = 0, 1, 2,...)$ *ohne endlichen Häufungspunkt gibt es eine ganze Funktion* g *so, daß für alle* $n = 0, 1, 2,...$ *gilt*

$$| f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| < h(x) \qquad (| x | \geqslant c_n) \tag{2}$$

und

$$g^{(n)}(x_m) = f^{(n)}(x_m) \qquad (\text{für alle } m \text{ mit } | x_m | \geqslant c_n). \tag{3}$$

Mit der in dieser Arbeit benutzten Beweismethode läßt sich entsprechend für die endlich oft differenzierbaren Funktionen der folgende Satz zeigen.

SATZ 3. *Zu jeder k-mal stetig differenzierbaren Funktion* f *auf* R, *jeder positiven, stetigen Funktion* h *auf* R *und zu jeder Folge verschiedener reeller Zahlen* $x_m(m = 0, 1, 2,...)$ *ohne endlichen Häufungspunkt gibt es eine ganze Funktion* g *so, daß für* $n = 0, 1,..., k$ *gilt*

$$| f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| < h(x)$$

und

$$g^{(n)}(x_m) = f^{(n)}(x_m) \qquad (x \in R; m = 0, 1, 2,...).$$

Zum Beweis von Satz 2 benutzen wir die folgenden drei Hilfssätze.

LEMMA (a). *Es sei* $\{z_m\}(m = 0, 1, 2,...)$ *eine Folge verschiedener komplexer Zahlen ohne endlichen Häufungspunkt, und es sei jedem* $m = 0, 1, 2,...$ *eine ganze Zahl* $k_m \geqslant 0$ *zugeordnet. Dann gibt es zu beliebig vorgegebenen komplexen Zahlen* $w_{m,l}$ $(0 \leqslant l \leqslant k_m ; m = 0, 1, 2,...)$ *eine ganze Funktion* ϕ *mit*

$$\phi^{(l)}(z_m) = w_{m,l} \qquad (0 \leqslant l \leqslant k_m ; m = 0, 1, 2,...). \tag{4}$$

Lemma (a) ist als Spezialfall eines allgemeineren Interpolationssatzes in [8, Theorem 15.15 S. 298] enthlaten.

Um zusätzlich zu der Interpolationseigenschaft (4) eine in gewissem Sinne von den Werten $w_{m,l}$ unabhängige Abschätzung für die Ableitungen $\phi^{(l)}(z)$ in der ganzen z-Ebene zu erhalten, verschärfen wir Lemma (a) in folgender Weise.

LEMMA (b). *Es sei* $0 \leqslant c_n \leqslant c_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2,...)$ *mit* $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$, es sei $\{z_m\}(m = 0, 1, 2,...)$ *eine Folge verschiedener komplexer Zahlen ohne endlichen Häufungspunkt, und es seien* $k_m \geqslant 0$ $(m = 0, 1, 2,...)$ *ganze Zahlen. Ferner seien* B_m $(m = 0, 1, 2,...)$ *positive Zahlen. Dann existiert eine in der ganzen z-Ebene positive, stetige Funktion* D *mit folgender Eigenschaft: Zu allen komplexen Zahlen* $w_{m,l}$ $(0 \leqslant l \leqslant k_m ; m = 0, 1, 2,...)$ *mit*

$$| w_{m,l} | < B_m \qquad (0 \leqslant l \leqslant k_m ; m = 0, 1, 2,...) \tag{5}$$

gibt es eine ganze Funktion ϕ so, daß für alle $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ gilt

$$\phi^{(l)}(z_m) = w_{m,l} \qquad (0 \leqslant l \leqslant k_m) \tag{6}$$

und

$$|\phi^{(l)}(z)| < D(z) \qquad (|z| \in [c_n, c_{n+1}]; 0 \leqslant l \leqslant k_n). \tag{7}$$

Die abschätzende Funktion D in Lemma (b), die wesentlich von den Schranken B_m abhängt, ist also bei Gültigkeit von (5) unabhängig von der Wahl der $w_{m,l}$.

Beweis. Zu jedem i, j $(0 \leqslant j \leqslant k_i;\ i = 0, 1, 2, \ldots)$ wählen wir nach Lemma (a) eine ganze Funktion $b_{i,j}$ mit

$$b_{i,j}^{(l)}(z_m) = \begin{cases} 1 & (m = i; l = j) \\ 0 & (m = i; 0 \leqslant l \leqslant k_m; l \neq j) \\ 0 & (m \neq i; 0 \leqslant l \leqslant k_m) \end{cases} \tag{8}$$

für alle $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Wir bestimmen zu $i = 0, 1, 2, \ldots$ Zahlen $\epsilon_i > 0$ so klein, daß die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i B_i \sum_{j=0}^{k_i} |b_{i,j}(z)| \tag{9}$$

in jeder kompakten Teilmenge der z-Ebene gleichmäßig konvergiert.

Ferner bestimmen wir nach Lemma (a) eine ganze Funktion E mit der Eigenschaft

$$E^{(l)}(z_m) = \begin{cases} 1/\epsilon_m & (l = 0; m = 0, 1, 2, \ldots) \\ 0 & (1 \leqslant l \leqslant k_m; m = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases} \tag{10}$$

Als Funktion D wählen wir nun eine in der ganzen z-Ebene positive, stetige Funktion so, daß für alle $n = 0\ 1\ 2, \ldots$ gilt

$$D(z) > K_n(z) \qquad (|z| \in [c_n, c_{n+1}]) \tag{11}$$

mit

$$K_n(z) = 2^{k_n} \sum_{v=0}^{k_n} |E^{(v)}(z)| \sum_{\mu=0}^{k_n} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i B_i \sum_{j=0}^{k_i} |b_{i,j}^{(\mu)}(z)| \right),$$

wobei die Konvergenz der unendlichen Reihen $K_n(z)$ aus (9) folgt.

Zu gegebenen komplexen Zahlen $w_{m,l}$ mit der Eigenschaft (5) bilden wir

$$\phi(z) = E(z)\, Q(z) \tag{12}$$

mit

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i \sum_{j=0}^{k_i} w_{i,j}\, b_{i,j}(z). \tag{13}$$

Nach (5) und (9) sind Q und ϕ ganze Funktionen. Aus (8), (10), (12), und (13) folgt für ϕ die Interpolationseigenschaft (6).

Ferner ergibt sich aus (5), (11), (12), und (13) für alle $n = 0, 1, 2,\ldots$

$$\begin{aligned} |\phi^{(l)}(z)| &\leqslant \sum_{v=0}^{l} \binom{l}{v} |E^{(v)}(z)|\,|Q^{(l-v)}(z)| \\ &\leqslant 2^{k_n} \sum_{v=0}^{k_n} |E^{(v)}(z)| \sum_{\mu=0}^{k_n} |Q^{(\mu)}(z)| \\ &\leqslant K_n(z) < D(z) \qquad (|z| \in [c_n, c_{n+1}];\ 0 \leqslant l \leqslant k_n). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Abschätzung (7), so daß Lemma (b) bewiesen ist.

Lemma (c). *Es sei* $0 \leqslant c_n \leqslant c_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2,\ldots)$ *mit* $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$ *und* $d_n > 0$ $(n = 0, 1, 2,\ldots)$. *Dann gibt es zu jeder auf* R *positiven, stetigen Funktion* h *eine ganze, auf* R *positive Funktion* b *so, daß* $u(x) = 1/[b(x)]$ *für alle* $n = 0, 1, 2,\ldots$ *die Ungleichung erfüllt*

$$\left| \frac{u^{(l)}(x)}{u(x)} \right| \frac{1}{[u(x)]^{d_n}} < h(x) \qquad (|x| \geqslant c_n\,;\ 0 \leqslant l \leqslant n). \tag{14}$$

Beweis. Ersetzt man u durch $1/b$, so hat (14) die Gestalt

$$\left| \left[\frac{1}{b(x)} \right]^{(l)} \right| [b(x)]^{1+d_n} < h(x) \qquad (|x| \geqslant c_n\,;\ 0 \leqslant l \leqslant n). \tag{15}$$

Durch Ausdifferenzieren von $1/b$ in (15) folgt nach Satz 1 sehr leicht, daß es zum Beweis von Lemma (c) genügt, die Existenz einer auf R positiven Funktion $b \in C^\infty$ mit der Eigenschaft (15) zu zeigen, da nach Satz 1 dann alle in (15) auftretenden Ableitungen von b so gut asymptotisch durch die entsprechenden Ableitungen einer ganzen, auf R positiven Funktion approximiert werden können, daß (15) auch für diese ganze Funktion gilt. Somit genügt es also, die Existenz einer auf R positiven Funktion $u \in C^\infty$ mit der Eigenschaft (14) zu zeigen. Dieses ist jedoch, wie man leicht zeigt, mit dem Nachweis gleichwertig, daß zu beliebigen positiven Zahlen d_n, zu beliebigen natürlichen Zahlen k_n $(n = 0, 1, 2,\ldots)$ und zu jeder auf R positiven, stetigen Funktion h eine auf R positive Funktion $u \in C^\infty$ mit

$$\left| \frac{u^{(l)}(x)}{u(x)} \right| \frac{1}{[u(x)]^{d_n}} < h(x) \qquad (|x| \in [n, n+1];\ 0 \leqslant l \leqslant k_n) \tag{16}$$

für alle $n = 0, 1, 2,\ldots$ existiert.

Jeder Term der Gestalt $u^{(v)}(x)/[u(x)^{1+q}] (v = 0, 1, 2,...)$ mit einem $q > 0$ läßt sich als eine endliche Summe schreiben deren Summanden bis auf konstante Faktoren von der Gestalt

$$\prod_{i=0}^{v} \left\{ \left[\frac{1}{u^{q_i}} \right]^{(i)} \right\}^{m_i}$$

sind mit positiven q_i und natürlichen m_i, wie sich leicht durch Induktion nach v bei Differentiation von $u^{(v)}(x)/[u(x)^{1+q}]$ nach der Quotientenregel ergibt.

Daher genügt es zum Beweis von (16) zu zeigen daß zu beliebigen natürlichen Zahlen k_n und b_n $(n = 0, 1,2,...)$, zu beliebigen positiven Zahlen $d_{n,i}$ $(0 \leqslant i \leqslant b_n ; n = 0, 1, 2,...)$ und zu jeder auf R positiven, stetigen Funktion h eine auf R positive Funktion $u \in C^\infty$ mit

$$\left| \left\{ \frac{1}{[u(x)]^{d_{n,i}}} \right\}^{(l)} \right| < h(x) \qquad (|x| \in [n, n+1]; 0 \leqslant l \leqslant k_n ; 0 \leqslant i \leqslant b_n) \tag{17}$$

für alle $n = 0, 1, 2,...$ existiert.

Wir wählen zunächst die spezielle Funktion $\zeta \in C^\infty$ mit

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0 & (x \leqslant 0), \\ 1/c \int_0^x p(t)\, dt & (0 < x \leqslant 1), \\ 1 & (x > 1), \end{cases} \tag{18}$$

wobei $p(t) = \exp(-1/t - 1/(1-t))(0 < t < 1)$, $p(0) = p(1) = 0$, $c = \int_0^1 p(t)\, dt$ gesetzt wird, und exp die Exponentialfunktion bedeutet.

Wir setzen ferner

$$\frac{1}{u(x)} = \begin{cases} \epsilon_m^{\gamma_m} & (|x| \in [2m, 2m+1]), \\ \{\epsilon_{m+1}^{\gamma_{m+1}/\gamma_m} + (\epsilon_m - \epsilon_{m+1}^{\gamma_{m+1}/\gamma_m})\, \zeta(2m+2-|x|)\}^{\gamma_m} & \\ \qquad (|x| \in [2m+1, 2m+2]) & \end{cases} \tag{19}$$

für alle $m = 0, 1, 2,...$, wobei wir positive Konstanten γ_m so groß wählen, daß

$$\gamma_m d_{2m+1,i} - k_{2m+1} > 0 \qquad (0 \leqslant i \leqslant b_{2m+1}) \tag{20}$$

gilt, und hinreichend kleine Zahlen $\epsilon_m > 0$ mit $\epsilon_{m+1} < \epsilon_m$ noch so zu bestimmen haben, daß (17) für die Funktion u aus (19) erfüllt ist.

Aus (18) und (19) folgt $1/u \in C^\infty$ und somit auch $u \in C^\infty$, da $1/u$ auf R positiv ist.

Offensichtlich lassen sich die Zahlen ϵ_m in (19) einerseits so klein wählen, daß die Ungleichung (17) für alle Intervalle $[n, n+1]$ mit geradem $n = 2m$ gilt.

Für die Intervalle $[n, n+1]$ mit $n = 2m + 1$ ergeben sich andererseits nach (19) die Ableitungen $\{1/[u(x)]^{d_{n,i}}\}^{(l)}$ als endliche Summe von Termen, die bis auf Faktoren aus Konstanten und Ableitungen von ζ die Gestalt haben

$$\{\epsilon_{m+1}^{\gamma_{m+1}/\gamma_m} + (\epsilon_m - \epsilon_{m+1}^{\gamma_{m+1}/\gamma_m})[\zeta]\}^{\gamma_m d_{2m+1,i-j}} \qquad (0 \leqslant j \leqslant k_{2m+1}). \tag{21}$$

Alle Terme der Gestalt (21) können daher wegen (20) durch geeignete Wahl der ϵ_m dem Betrage nach so klein gemacht werden, daß die Ungleichung (17) gilt.

Damit ist Lemma (c) bewiesen.

Beweis zu Satz 2. Es sei u eine Funktion aus C^∞ mit $u(x) > 1$ $(x \in R)$ und mit der Eigenschaft, daß $b = 1/u$ eine ganze Funktion ist, wobei wir u im weiteren noch mit zusätzlichen Eigenschaften nach Lemma (c) festlegen werden.

Wir bestimmen zu gegebenem $f \in C^\infty$ nach Satz 1 eine ganze, von u abhängige Funktion ψ_u so, daß

$$|(uf)^{(l)}(x) - \psi_u^{(l)}(x)| < 1 \qquad (|x| \in [c_n, c_{n+1}];\ 0 \leqslant l \leqslant n) \tag{22}$$

für alle $n = 0, 1, 2,\ldots$ ist.

In Lemma (b) setzen wir $B_m = 1$ $(m = 0, 1, 2,\ldots)$ und wählen zu jedem m die ganzzahligen k_m so, daß $k_m \geqslant m$ und k_m größer als der größte Index n mit $|x_m| \in [c_n, c_{n+1}]$ ist. Wir setzen außerdem

$$w_{m,l} = (uf)^{(l)}(x_m) - \psi_u^{(l)}(x_m) \qquad (0 \leqslant l \leqslant k_m),$$

so daß die Eigenschaft $|w_{m,l}| < B_m$ $(0 \leqslant l \leqslant k_m)$ nach (22) für diese $w_{m,l}$ unabhängig von der Wahl von u erfüllt ist. Nach Lemma (b), (6) und (7) gibt es daher eine in der ganzen z-Ebene positive, stetige Funktion D, die unabhängig von u ist, sowie eine von u abhängige ganze Funktion ϕ_u so, daß für alle $n = 0, 1, 2,\ldots$ gilt

$$\phi_u^{(l)}(x_m) = (uf)^{(l)}(x_m) - \psi_u^{(l)}(x_m) \qquad (|x_m| \in [c_n, c_{n+1}];\ 0 \leqslant l \leqslant n), \tag{23}$$

$$|\phi_u^{(l)}(x)| < D(x) \qquad (|x| \in [c_n, c_{n+1}];\ 0 \leqslant l \leqslant n). \tag{24}$$

Wir bilden die von u abhängige ganze Funktion g_u, die auf R gegeben ist durch

$$g_u(x) = \frac{\phi_u(x)}{u(x)} + \frac{\psi_u(x)}{u(x)}. \tag{25}$$

Aus (23) folgt

$$(ug_u)^{(l)}(x_m) = (uf)^{(l)}(x_m) \qquad (|x_m| \in [c_n, c_{n+1}]; 0 \leqslant l \leqslant n),$$

woraus man durch Induktion nach l leicht mit einer einfachen Rechnung die in Satz 2, (3) behauptete Interpolationseigenschaft

$$g_u^{(l)}(x_m) = f^{(l)}(x_m) \qquad (|x_m| \in [c_n, c_{n+1}]; 0 \leqslant l \leqslant n)$$

herleitet. Wir erhalten aus (22), (24), und (25)

$$|(uf)^{(l)}(x) - (ug_u)^{(l)}(x)| < |\phi_u^{(l)}(x)| + 1 < D(x) + 1$$
$$(|x| \in [c_n, c_{n+1}]; 0 \leqslant l \leqslant n)$$

und hieraus durch Ausdifferenzieren des Produktes uf und Anwendung der Dreiecksungleichung

$$|f^{(l)}(x) - g_u^{(l)}(x)| < \frac{D(x)+1}{u(x)} + A_l \sum_{j=0}^{l-1} |f^{(j)}(x) - g_u^{(j)}(x)| \frac{|u^{(l-j)}(x)|}{u(x)}$$
$$(|x| \in [c_n, c_{n+1}]; 0 \leqslant l \leqslant n) \qquad (26)$$

mit nur von l, nicht aber von u abhängigen Konstanten A_l, wobei die Summe auf der rechten Seite von (26) im Falle $l = 0$ durch 0 zu ersetzen ist.

Da der Summationsindex j auf der rechten Seite von (26) nur bis $l - 1$ läuft, läßt sich die Ungleichung (26) sukzessiv nach allen Termen

$$|f^{(j)}(x) - g_u^{(j)}(x)| \qquad (0 \leqslant j \leqslant n)$$

auflösen, und man erhält durch Induktion nach l aus (26) mit einfachen Abschätzungen

$$|f^{(l)}(x) - g_u^{(l)}(x)| < B_l[D(x)+1] \sum_{j=1}^{l+1} \frac{1}{[u(x)]^j} \sum_{\substack{0 \leqslant \mu_0, \ldots, \mu_l < j \\ \mu_0 + \cdots + \mu_l < j}} \prod_{v=0}^{l} |u^{(v)}(x)|^{\mu_v}$$
$$(|x| \in [c_n, c_{n+1}]; 0 \leqslant l \leqslant n), \qquad (27)$$

wobei die Konstanten B_l nur von l abhängen.

Wegen der Summationsbedingung $\mu_0 + \cdots + \mu_l < j$ und somit

$$j - (\mu_0 + \cdots + \mu_l) \geqslant 1$$

folgt bei Beachtung von $u(x) > 1$ aus (27)

$$|f^{(l)}(x) - g_u^{(l)}(x)| < C_n[D(x)+1] \sum_{\substack{0 \leqslant \mu_0, \ldots, \mu_n < n+1 \\ \mu_0 + \cdots + \mu_n < n+1}} \prod_{v=0}^{n} \left\{ \left| \frac{u^{(v)}(x)}{u(x)} \right|^{\mu_v} \frac{1}{u(x)^{1/(n+1)}} \right\}$$
$$(|x| \in [c_n, c_{n+1}]; 0 \leqslant l \leqslant n) \qquad (28)$$

mit nur von n abhängigen Konstanten C_n.

Nach Lemma (c), (14) kann schließlich die ganze Funktion $b = 1/u$ und damit u so gewählt werden, daß alle Faktoren $| u^{(\nu)}(x)/[u(x)]|^{\mu_\nu}[u(x)]^{-1/(n+1)}$ in (28) hinreichend klein werden, um insgesamt die Abschätzung

$$|f^{(l)}(x) - g_u^{(l)}(x)| < h(x) \qquad (|x| \in [c_n, c_{n+1}]; 0 \leqslant l \leqslant n)$$

für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ zu erreichen. Da wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Monotonieeigenschaft $h(x_2) \leqslant h(x_1)$ für $|x_2| \geqslant |x_1|$ annehmen dürfen, ist damit auch die Ungleichung (2) und somit Satz 2 in allen Teilen bewiesen.

Der Beweis zu Satz 3 ergibt sich als vereinfachte Modifikation des Beweises zu Satz 2.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß neuere Ergebnisse über die simultane Approximation und Interpolation durch ganze Funktionen kürzlich in [2] und [7] veröffentlicht wurden.

Literatur

1. T. Carleman, Sur un théorème de Weierstrass, *Ark. Mat. Astronom. Fys.* **20B** (1927), 1–5.
2. P. Gauthier and W. Hengartner, Simultaneous complex approximation and interpolation on closed sets, erscheint in Kürze.
3. L. Hoischen, A note on the approximation of continuous functions by integral functions, *J. London Math. Soc.* **42** (1967), 351–354.
4. L. Hoischen, Asymptotische Approximation stetiger Funktionen durch ganze Dirichlet-Reihen, *J. Approximation Theory* **3** (1970), 293–299.
5. L. Hoischen, Eine Verschärfung eines Approximationssatzes von Carleman, *J. Approximation Theory* **9** (1973), 272–277.
6. W. Kaplan, Approximation by entire functions, *Michigan Math. J.* **3** (1955–1956), 43–52.
7. L. A. Rubel and S. Venkateswaran, Uniform approximation by splines of polynomials and of entire functions, erscheint in Kürze.
8. W. Rudin, "Real and Complex Analysis," McGraw-Hill, New York, 1966.
9. A. Sinclair, A general solution for a class of approximation problems, *Pacific J. Math.* **8** (1958), 857–866.